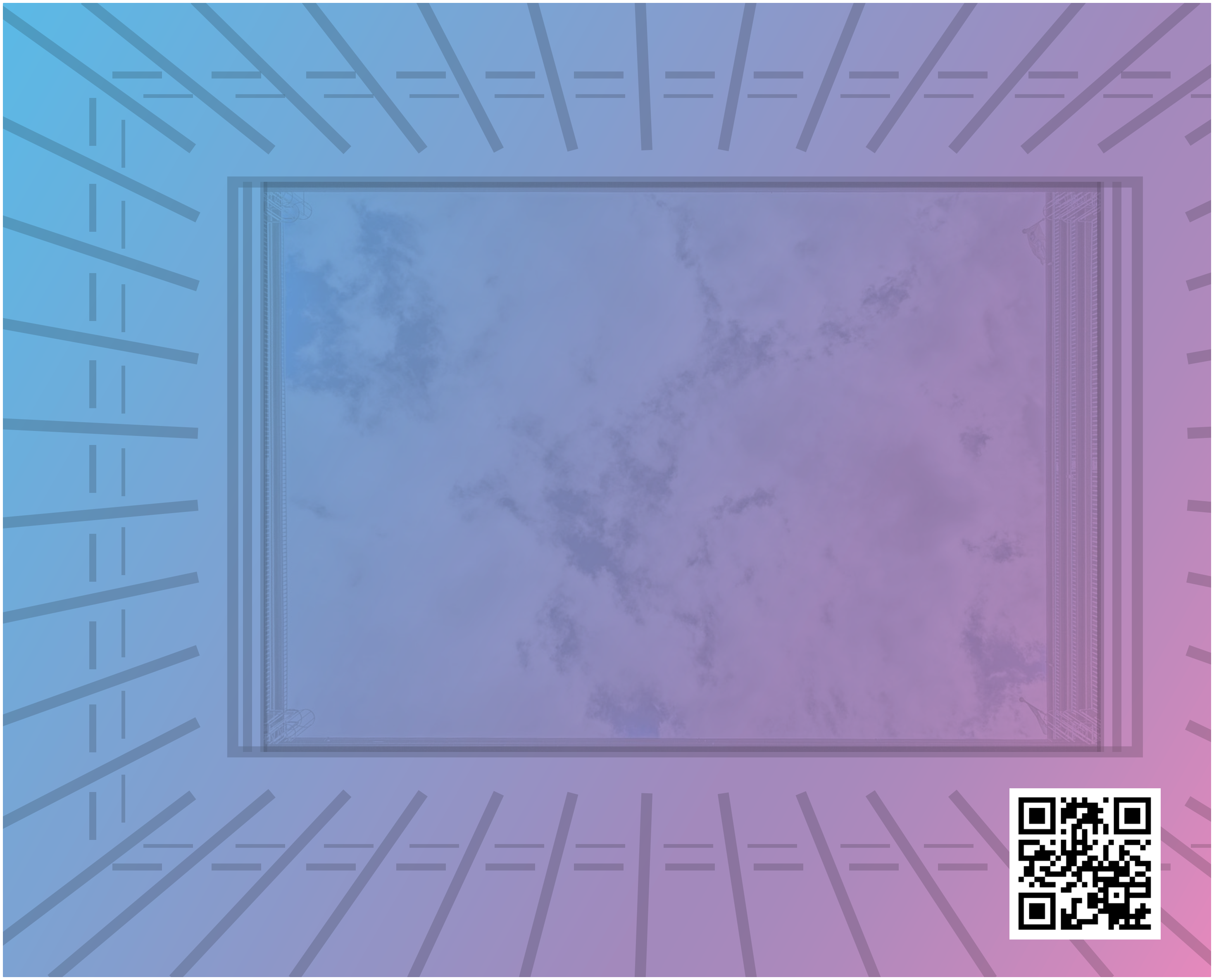
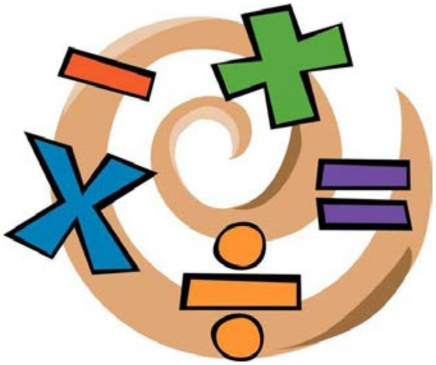
Operaciones algebraicas

MÓDULO 14. Mi mundo en representaciones simbólicas y algorítmicas



Operaciones algebraicas

Así como en la aritmética se estudian las operaciones con números reales, en el álgebra se trabajan las operaciones con términos y expresiones algebraicas. Básicamente las operaciones se desarrollan de la misma forma, con la diferencia de incluir una “restricción” o “característica” que define la forma de operar.



Suma y Resta: Reducción de términos semejantes

Llamaremos reducción a la acción de sumar o restar números positivos y negativos, de esta forma evitaremos confusiones con los signos que tengan cada uno de los elementos a operar.

De manera simple y sencilla se pueden operar todos los términos siempre y cuando sean **semejantes**.

Nota: Dos o más términos son semejantes si tienen la misma literal y exponente.

$$-4\,\mathbf{x}^2 + 9\,\mathbf{x}^2 =$$

Si los términos que deseamos reducir son semejantes, unicamente operamos los números y al valor resultante lo acompañará la letra y signo que indico la semejanza.

$$\underbrace{-4\,x^2 + 9}_{+5}x^2 = +5x^2$$

En caso de encontrarnos con multiples términos, la principal tarea corresponde a la agrupación de semejantes para operarlos entre si, los términos que no se puedan agrupar se indican como un valor resultante.

$$\underbrace{-11 \overbrace{-4x^2 - 9x^2}^{\text{Se agrupan y operan}} \overbrace{-6x}^{\text{Se indica}} + 7}_{\text{Se agrupan y operan}} = \underbrace{+5x^2 - 6x - 4}_{\text{Polinomio reducido}}$$

Multiplicación de expresiones algebraicas.

La multiplicación de expresiones algebraicas es una operación que no restringe su ejecución de forma tan estricta como la reducción (suma y resta) ya que la única condición es que se desarrolle de forma ordenada, respetando las propiedades de cada uno de los elementos que se operan.

Para ello, visualiza a los términos que se multiplican en tres secciones: Signos, coeficientes y las literales como una parte junto con el exponente. Esta forma de organizar la información permite que operemos cada sección con su correspondiente.

literal

signo

$$-9m^3$$

coeficiente

Para operar cada parte con su correspondiente se debe considerar lo siguiente:

Signos	Coeficientes	Literales
Se aplica la Ley de signos para la multiplicación (+)(+)=+ (+)(-)=- (-)(+)=- (-)(-)=+	Se aplican las tablas de multiplicar	Se aplica la ley de exponentes para la multiplicación. "Cuando se multiplican términos con la misma base, los exponentes se suman" $(x^3)(x^5) = x^{(3+5)} = x^8$

En resumen, para realizar la multiplicación de expresiones algebraicas:

- Identifico la cantidad de términos que multiplico.
- Si es un monomio por un polinomio, el monomio debe de multiplicar a cada término que conforma el polinomio.

$$(4m)(-5m + 7m^2) = -20m^2 + 28m^3$$

- Si es un polinomio por un polinomio, cada término del primer polinomio debe multiplicar a cada término del segundo polinomio. Finalmente se reducirán aquellos términos que sean semejantes.

$$(4m - 2n^2)(-5m + 7n^2) = -20m^2 \underbrace{+ 28mn^2 + 10n^2m}_{\text{Se reduce por ser semejante}} - 14n^3$$

$$= -20m^2 + 38mn^2 - 14n^3$$

División de expresiones algebraicas

De la misma forma que la multiplicación de expresiones algebraica, la división es una operación que no restringe su ejecución de forma tan estricta como la reducción de números, ya que la única condición es que se desarrolle de forma ordenada, respetando las propiedades de cada uno de los elementos que se operan.

Para ello, visualiza los términos que se operan en tres secciones: Signos, coeficientes y las literales como una parte junto con el exponente. Esta forma de organizar la información permite que operemos cada sección con su correspondiente.

literal

signo

$$-9m^3$$

coeficiente

Para operar cada parte con su correspondiente se debe considerar lo siguiente:

Signos	Coeficientes	Literales
Se aplica la Ley de signos para la división +/+=+ +/-=- -/+=- -/-=+	Se aplican las tablas de multiplicar	Se aplica la ley de exponentes para la división. “Cuando se dividen términos con la misma base, los expo-nentes se restan” $x^5 / x^3 = x^{(5+3)} = x^2$

Para la división entre expresiones algebraicas nos encontramos con tres casos.

- **CASO I**: División de monomio entre monomio

Es considerada la situación básica de división y visualmente se trabaja como una fracción. Implica que cada elemento del monomio que se encuentra en el numerador se dividida entre cada elemento del monomio del denominador.

$$\frac{-20m^6}{+4m^2} = -5m^4$$

$$\frac{-}{+} = - \qquad \frac{20}{4} = 5 \qquad \frac{m^6}{m^2} = m^4$$

- **CASO II**: División de un polinomio entre monomio

Se divide cada término que conforma el polinomio del numerador entre el monomio del denominador (se retoma el proceso del caso I.

$$\frac{-20m^6 + 12m^{10}}{+4m^2} = -5m^4 + 3m^8$$

$$\frac{-20m^6}{+4m^2} = -5m^4 \qquad \frac{+12m^{10}}{+4m^2} = +3m^8$$

- **CASO III**: División de polinomio entre polinomio

En este último caso, se ocupa el formato tradicional de la división, en donde es indispensable llevar a cabo múltiples tareas que brindarán el polinomio resultante.

1. Los polinomios que se encuentran en el dividendo y divisor deben ser ordenados a partir del grado de cada término (exponente de la literal).

$$\frac{14x - 12 + 6x^2}{-2 + 3x} = 3x - 2 \,\overline{\big)\, 6x^2 + 14x - 12}$$

2. Una vez ordenados los polinomios, se dividirá el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline \underbrace{3x - 2} & 6x^2 + 14x - 12 \end{array}$$

$$\frac{6x^2}{3x} = 2x$$

3. El cociente obtenido se multiplicará por cada término del divisor y el resultado se colocará debajo del término semejante del dividendo pero con el signo contrario al obtenido al operar.

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline 3x - 2 & 6x^2 + 14x - 12 \\ & -6x^2 + 4x \end{array}$$

*Se cambia el signo

$$(2x)(3x) = 6x^2$$

$$(2x)(-2) = -4x$$

4. Se reducirán términos semejantes (buscando la reducción a cero de uno de los términos operados).

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline 3x - 2 & 6x^2 + 14x - 12 \\ & -6x^2 + 4x \\ \hline & 0 + 18x \end{array}$$

5. Se baja el siguiente término y se repiten los pasos 2, 3 y 4 hasta concluir con todos los términos del dividendo.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x \\
\hline
3x - 2 & 6x^2 + 14x - 12 \\
 & -6x^2 + 4x \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad + 18x - 12
\end{array}
$$

$$\frac{+18x}{3x} = 6$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x + 6 \\
\hline
3x - 2 & 6x^2 + 14x - 12 \\
 & -6x^2 + 4x \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad + 18x - 12 \\
 & \quad\quad - 18x + 12 \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

$$(6)(3x) = 18x$$

$$(6)(-2) = -12$$

6. El resultado de la división corresponde al polinomio situado en el cociente.

$$\frac{6x^2 + 14x - 12}{3x - 2} = 2x + 6$$

Ejercicios de práctica.

Resuelve los siguientes ejercicios

1) $+ 9x - 4x - 10x + 2x =$
2) $- 9b^2 + 5a - 3a - 8a - 2b^2 =$
3) $- 9a^3 - 6a^3 + 8a^3 =$
4) $- 2y + 6x + 3x - 7w + 4w =$
5) $+ 15b^5 + 10b - 10b^5 =$
6) $6x^2 - 5x + 3y =$
7) $+ 2x + 3y =$
8) $+ 9x^2 + 6x + 2x + 2x^2 =$
9) $- 8y + 6y - 3x + 5x - 2w =$
10) $3n^2 + 5m^2 - 6m^2 + 4m^2 =$
11) $(- 7x^3) (4x + 8y - 2x^2) =$
12) $(- 15x^2 + 30x^6) / (- 5x) =$
13) $((3/5) m^2) (2m - 9m^4) =$
14) $(9p) (2/3\ p + 1/7\ r - 5/3\ q) =$
15) $(- 9p^5 + 7p^6) / 4p^2 =$
16) $(2 / 9\ n^4) (- 3 / 7\ n - 5n^8) =$
17) $(12m^7 + 20m^5 - 30m^4) / (+ 2m^3) =$
18) $(- 10x^3) (11x - 7x^7) =$
19) $121n^9 / - 11n^9 =$
20) $875y^9 / - 5y^7 =$

Referencias bibliográficas

Bello, I. & Hopf, F. (2014). Aritmética básica. México: Mc Graw Hill.

Lehman, C. (2010). Álgebra. México: Limusa.

Swokowski, E. (1988). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Iberoamérica.

Participantes en la Elaboración del Contenido

Responsable en Contenido: Carlos Ignacio Tepox Gutiérrez
Diseñador Instruccional: Dorian Ruíz Alonso
Desarrollador Multimedia: Rubén García Zúñiga
Desarrollador de Sistemas: Aarón Juárez Sierra